Exponenciación de Cardinales Infinitos

Andrés Eduardo Caicedo*
University of California, Berkeley

Octubre 1998

Abstract

Presentamos una introducción al problema de la exponenciación cardinal y preguntas similares en Teoría de Conjuntos, enfatizando el papel de la Hipótesis de los Cardinales Singulares.

0 Introducción

De manera muy general e inexacta, podría decirse que la teoría de conjuntos es el estudio del concepto de infinito. La idea fundamental detrás de esta observación es que hay una noción natural de tamaño (*cardinal*) de un conjunto y que, bajo ésta, los infinitos son muchos y muy diversos.

A lo largo de este artículo trabajamos con el sistema usual de axiomas de teoría de conjuntos, ZFC, incluyendo el axioma de elección, AC. Dicho axioma implica que los infinitos están bien ordenados y que $\omega = \aleph_0$, el cardinal del conjunto de los números naturales, es el primero de todos.

Así como hay una noción natural de cardinal, hay una manera natural de extender las operaciones elementales entre números naturales (suma, multiplicación, exponenciación) a los números infinitos. Las generalizaciones de suma y producto no son muy interesantes, en el sentido de que si κ, λ son infinitos, entonces $\kappa+\lambda = \kappa\cdot\lambda = \max\{\kappa,\lambda\}$. La exponenciación, por otro lado, está lejos de ser trivial. El tema de este artículo es precisamente cuán no trivial resulta ser.

Definimos κ^λ como el cardinal del conjunto de funciones de un conjunto de cardinal λ en uno de cardinal κ. Como es usual en teoría de conjuntos, identificamos un ordinal con el conjunto de ordinales predecesores, y un cardinal con un ordinal inicial (es decir, tal que no hay biyecciones entre él y ningún ordinal menor), de modo que $\kappa < \lambda$ si y sólo si $\kappa \in \lambda$.

Uno de los primeros problemas que interesó a Cantor, de hecho central para sus investigaciones, fue el de la *Hipótesis del Continuo*, CH. Para entenderlo

**E-mail:* `acaicedo@math.berkeley.edu`

mejor, recuérdese que un subconjunto *perfecto* de $\mathbf{R}$ es un conjunto compacto no vacío y sin puntos aislados. Uno de los resultados notables de Cantor establece que todo conjunto perfecto tiene el mismo cardinal que $\mathbf{R}$, y que todo cerrado o bien es enumerable o bien contiene un subconjunto perfecto. Luego, todo cerrado y, por tanto, todo F_σ (unión contable de cerrados) y en particular todo abierto, o bien tiene a lo más el tamaño $\aleph_0$ de $\mathbf{N}$, o bien el tamaño $\mathfrak{c}$ de $\mathbf{R}$.

Una pregunta que surge de manera natural, es si ésta es una propiedad peculiar de los conjuntos considerados, o es una característica intrínseca de todos los subconjuntos de $\mathbf{R}$; es decir, si es consecuencia de la topología de los reales, o de su cardinal. Cantor pensaba que este último era el caso, y ésta es su famosa conjetura. Para establecer que el tamaño de los conjuntos perfectos es el de los reales, se muestra primero (fácilmente) que $\mathfrak{c} = 2^{\aleph_0}$ y que $2^{\aleph_0}$ es el cardinal del conjunto de Cantor $\mathcal{C}$. Luego, se construye una inyección de $\mathcal{C}$ en cualquier conjunto perfecto. De hecho, la inyección puede conseguirse continua.

Lo anterior puede generalizarse a todo perfecto en un espacio polaco (es decir, un espacio separable, metrizable con una métrica completa). Un argumento estándar en teoría descriptiva de conjuntos muestra que, dado cualquier conjunto de Borel X en $\mathbf{R}$, hay una topología polaca τ en $\mathbf{R}$ con los mismos conjuntos de Borel que la topología usual, y tal que X es cerrado en τ. Esto muestra que todo subconjunto de Borel de $\mathbf{R}$ tiene la propiedad del conjunto perfecto, es decir, es contable o contiene una copia de $\mathcal{C}$. Lo cual indica una razón seria por la cual cualquier contraejemplo a CH debe ser bastante complicado.

De hecho, mucho más en esta dirección es cierto: Resultados de Saharon Shelah y Hugh Woodin a fines de los años 80 establecieron que, módulo cardinales grandes, no sólo los conjuntos de Borel, sino todo conjunto "razonablemente" definible de números reales tiene la propiedad del conjunto perfecto[1]. Así que cualquier contraejemplo a CH que se obtenga, si existe, debe ser altamente no constructivo. Es posible, incluso, que no exista ningún contraejemplo. Esto fue demostrado por Gödel a fines de los años 30, al introducir el modelo L de los conjuntos construibles. Gödel demostró en ZF que L es un modelo de elección y de la Hipótesis Generalizada del Continuo.

Por otro lado, Paul Cohen, a comienzos de los 60, demostró que es posible que CH falle; es decir, que su negación sea consistente con ZFC (suponiendo que ZFC es consistente). Para esto, Cohen introdujo el método de forcing (a veces llamado en español forzamiento).

CH apareció así, de manera natural, como el primer ejemplo de una proposición matemática 'interesante' cuyo valor de verdad no puede establecerse basándonos sólo en ZFC. La independencia es un fenómeno ineludible en teoría de conjuntos. Hay varias alternativas posibles cuando uno se tropieza con ella: por ejemplo, puede decidirse que si una proposición es independiente entonces de hecho carece de valor de verdad en el sentido clásico, y es igualmente razonable

[1] En términos técnicos, "razonablemente" definible significa en $L(\mathbf{R})$. Cualquiera de estos conjuntos es definible por via de una fórmula que admite reales y ordinales como parámetros.

asumirla cierta o falsa. Esta es una posición aceptable, claro, a menos que se sea platonista en algún sentido. Esa era la posición de Gödel y, si los axiomas actuales no bastan para decidir una hipótesis, su idea era que debían buscarse extensiones plausibles de los axiomas que sí lo hicieran.

Una línea de investigación bastante delicada y profunda es la de tratar de establecer estos axiomas que terminarían decidiendo CH. La idea no es simplemente agregar CH o $\neg\mathsf{CH}$ a ZFC, sino tratar de ganar cierto entendimiento acerca de cómo 'debe' ser el universo conjuntista y decidir, con base en este entendimiento que usualmente se obtiene mediante largos rodeos basados en hipótesis auxiliares, qué debe agregarse a nuestra lista de axiomas básicos.

La posición de CH aún está por decidirse. ¿Qué ocurre si miramos cardinales mayores? La situación dista de ser entendida por completo, pero bastante se ha explorado, y lo que sigue es un breve informe de tal exploración. La pregunta básica es la siguiente: ¿Cuáles (y bajo qué hipótesis) son los posibles comportamientos de la exponenciación cardinal, la función $(\kappa, \lambda) \mapsto \kappa^\lambda$? ¿Cuáles son sus libertades y sus limitaciones?

El marco apropiado para investigar esta pregunta recibe el nombre genérico de *Problema de los Cardinales Singulares*. Recuérdese que la cofinalidad de un cardinal κ, $\mathrm{cf}\,\kappa$, se define como el menor λ para el cual existe una función cofinal $f : \kappa \to \lambda$.[2] κ es *regular* si y sólo si $\mathrm{cf}\,\kappa = \kappa$; en otro caso, κ es *singular*. Bajo elección, todo cardinal sucesor es regular, una generalización de que la unión enumerable de conjuntos enumerables es enumerable; por tanto, todo cardinal singular es límite, y $\aleph_\omega$ es el menor de todos. El por qué el problema de la exponenciación menciona en su nombre a los cardinales singulares no es inmediato, y será explicado más adelante.

Los resultados que mencionaremos aquí son de dos tipos: resultados absolutos, es decir teoremas de ZFC, que abarcan las limitaciones conocidas; y resultados de consistencia relativa, es decir (meta)teoremas que muestran libertades y restricciones de la exponenciación, consistentes módulo la consistencia de la teoría de conjuntos o de sus extensiones por cardinales grandes. Al menos parcialmente, estos resultados también muestran que es necesario asumir la consistencia de tales cardinales.

La naturaleza de este artículo es completamente expositiva. Ninguno de los resultados acá mencionados es de mi autoría, y todos pueden encontrarse en la literatura. Este artículo puede pensarse, entonces, como una introducción al tema de la exponenciación cardinal, accesible a lectores con un conocimiento básico de teoría axiomática de conjuntos, incluyendo una idea del método de forcing. De cualquier forma, algunos comentarios aislados presumen más requi-

[2] En general, si $(\mathbf{P}, \leq)$ es un conjunto parcialmente ordenado, decimos que $\mathrm{cf}\,(\mathbf{P}) = \lambda$ si λ es el menor cardinal posible de un conjunto $A \subseteq \mathbf{P}$ cofinal en $\mathbf{P}$. A es cofinal si para todo $p \in \mathbf{P}$ existe un $q \in A$ tal que $p \leq q$. Una función f es cofinal en $\mathbf{P}$ si $\mathbf{P} \cap \mathrm{ran}\, f$ es cofinal en $\mathbf{P}$. Si $\mathbf{P}$ es un orden lineal, $\mathrm{cf}\,(\mathbf{P})$ es un cardinal *regular*, pero en general éste no es el caso. Así mismo, no siempre hay una sucesión de tamaño $\mathrm{cf}\,(\mathbf{P})$ estríctamente creciente y cofinal en $\mathbf{P}$. Cuando esto ocurre, decimos que $\mathbf{P}$ tiene *cofinalidad verdadera*, y escribimos $\mathrm{tcf}(\mathbf{P}) = \mathrm{cf}\,(\mathbf{P})$.

sitos.

La notación usada es estándar, lo que casi siempre significa que puede encontrarse en [J] o [Ku3]. Las estructuras conjuntistas se supondrán dotadas de una relación ϵ que siempre interpretaremos como $\in$ a menos que se especifique lo contrario. Como este artículo está escrito en español, constantemente tuve que hacer elecciones acerca de cómo traducir algunos términos técnicos, y en ocasiones opté por no traducirlos. Es así como menciono *extenders*, *core models* y *forcing*. El editor sugirió reemplazarlos por *extensores*, *modelos nucleares* y *forzamiento*, pero creo que es mejor dejarlos sin traducción de momento, por la misma razón por la que hablo de ZFC y no ZFE, CH y no HC, SCH y no HCS, etc.

Quiero agradecer al profesor Xavier Caicedo, quien dirigió mi tesis de pregrado en la Universidad de los Andes, acerca de este tema, y luego me convenció de escribir este artículo. Xavier y el editor sugirieron una cantidad impresionante de correcciones en estilo y redacción, que traté en general de seguir. Espero haber reducido al mínimo el número de errores; por supuesto, todos los que aparezcan son de mi completa responsabilidad.

1 Primeros Resultados

El primer teorema en exponenciación cardinal se debe a Cantor e introduce su famoso método diagonal: $\kappa < 2^\kappa = \kappa^\kappa$; en particular, $\aleph_0 < \mathfrak{c}$. La siguiente observación no trivial se debe a König (1905): $\kappa^{\mathrm{cf}\,\kappa} > \kappa$. Nótese que la desigualdad de König generaliza la de Cantor, pues $(2^\kappa)^\kappa = 2^\kappa$, así que $\mathrm{cf}\,(2^\kappa) > \kappa$.

La generalización de CH a cardinales mayores fue propuesta por Felix Hausdorff [Ha] en 1908; la *hipótesis generalizada del continuo* (GCH):

$$\forall\kappa\,(2^\kappa = \kappa^+).$$

Ésta es una hipótesis conveniente, por cuanto simplifica en extremo la aritmética. En efecto, como muestra una sencilla inducción, si GCH vale entonces:

$$\aleph_\alpha^{\aleph_\beta} = \begin{cases} \aleph_{\beta+1} & \text{si } \alpha \leq \beta, \\ \aleph_\alpha & \text{si } \aleph_\beta < \mathrm{cf}\,(\aleph_\alpha), \\ \aleph_{\alpha+1} & \text{si } \mathrm{cf}\,(\aleph_\alpha) \leq \aleph_\beta < \aleph_\alpha. \end{cases}$$

Sin embargo, en los 30 años siguientes a la publicación del artículo de Hausdorff no sólo no se consiguió demostrar GCH, ni siquiera pudo establecerse la hipótesis más débil

$$\exists\kappa\,(2^\kappa = \kappa^+),$$

y tampoco logró encontrarse un contraejemplo. No fueron muchos los teoremas obtenidos acerca de la exponenciación en general. Cabe mencionar los siguientes resultados elementales (algunos de los cuales no se conocieron hasta la década del 60):

Definición 1.1

i) $\kappa^{<\lambda} = \sup_{\varrho<\lambda} \kappa^{\varrho}$.

ii) *Un cardinal κ es límite fuerte sii $\lambda < \kappa$ implica $2^{\lambda} < \kappa$.*

Muchos cardinales son límites fuertes. Por ejemplo, el supremo de la sucesión $\aleph_0, 2^{\aleph_0}, 2^{2^{\aleph_0}}, \ldots$ Bajo GCH, todo cardinal límite es límite fuerte.

Lema 1.2 *Sean κ y λ cardinales infinitos. Entonces*

- $2^{\kappa} = (2^{<\kappa})^{\operatorname{cf}\kappa}$. *En particular, si κ es límite fuerte, $2^{\kappa} = \kappa^{\operatorname{cf}\kappa}$.*
- *[Bukovský-Hechler] Si κ es singular, y la exponencial $\varrho \mapsto 2^{\varrho}$ es finalmente constante bajo κ (es decir, $2^{\rho} = 2^{\rho'}$ para cualesquiera ρ y ρ' cardinales menores que κ y suficientemente grandes), entonces $2^{\kappa} = 2^{<\kappa}$.*
- *Si definimos $(<\kappa)^{\lambda} = \sup_{\varrho<\kappa} \varrho^{\lambda}$, entonces*

$$\kappa^{\lambda} = \begin{cases} 2^{\lambda} & \text{si } \kappa \leq 2^{\lambda} \\ \kappa \cdot (<\kappa)^{\lambda} & \text{si } \lambda < \operatorname{cf}\kappa \\ (<\kappa)^{\lambda} & \text{si } \operatorname{cf}\kappa \leq \lambda < 2^{\lambda} < \kappa \\ & \quad \text{y } \rho^{\lambda} \text{ es finalmente cte. bajo } \kappa \\ \kappa^{\operatorname{cf}\kappa} & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Cabe hacer algunas observaciones. Por inducción, el lema demuestra que la función $\kappa \mapsto \operatorname{cf}\kappa$, la función $\gimel(\kappa) = \kappa^{\operatorname{cf}\kappa}$, y la exponencial $\kappa \mapsto 2^{\kappa}$ determinan por completo la exponenciación.

Nótese que la primera parte del lema es trivial si κ es regular, pero indica restricciones fuertes si es singular. Volveremos sobre esto más adelante. De todos modos, bajo GCH el lema es obvio.

En 1938 aparece [Gö1], donde Gödel anuncia la consistencia de AC y GCH. Los detalles de las demostraciones aparecen en 2 artículos posteriores[3], ver [Gö2].

El trabajo de Gödel representó un gran adelanto en el estudio de la teoría de conjuntos. Su idea es demostrar la consistencia de GCH mostrando que vale en un modelo interno, L, la clase de los conjuntos construibles. En ZF, Gödel mostró que $L \models \mathsf{ZFC} + \mathsf{GCH}$. Por tanto, en ZFC no puede obtenerse un contraejemplo a la hipótesis generalizada del continuo, a menos que ZF ya sea inconsistente. Pero no parecía muy probable que GCH pudiera llegar a demostrarse; incluso, en su concepción platonista de las matemáticas, Gödel pensaba que CH era falsa, aunque creía que ZF no bastaría para comprobarlo:

[3] En el primero de ellos Gödel asume la consistencia de un cardinal inaccesible, hipótesis que luego elimina.

> [...] es muy sospechoso que, en oposición a las numerosas ideas verosímiles que implican la negación de la hipótesis del continuo, no se conozca ninguna idea verosímil que la implique. Creo que, resumiendo todo lo dicho, hay buenas razones para sospechar que el papel del problema del continuo en la teoría de conjuntos consistirá en conducir al descubrimiento de nuevos axiomas que permitan refutar la conjetura de Cantor.[4]

En su tesis de doctorado, Hajnal introdujo una generalización de la clase L, con la que logró establecer que

$$\text{si} \quad \mathsf{ZFC} \vdash 2^{\aleph_0} \neq \aleph_2 \quad \text{entonces} \quad \mathsf{ZFC} \vdash \mathsf{CH}$$

(ver [K]). Esto sirvió como evidencia intuitiva para suponer que terminaría demostrándose que CH es independiente.

Un *modelo interno* es una clase transitiva que es modelo de ZF y contiene a ORD. Por supuesto, es una clase propia. Asumiendo solamente ZF no puede obtenerse un modelo que sea un conjunto, a no ser que ZF sea inconsistente, por los teoremas de incompletitud de Gödel.

L es el menor modelo interno: cualquier otro lo contiene. Y es absoluto: Si M es un modelo interno, $L^M = L$, es decir,

$$\forall x\, (x \in M \wedge (M \models x \in L) \iff x \in L\,).$$

Como $L \models V = L$, no puede mostrarse en ZF que haya conjuntos no construibles.

2 Cardinales Grandes y Sumersiones Elementales

Poco antes de los resultados de Cohen, a los que nos referiremos en la siguiente sección, Dana Scott involucró cardinales grandes en el panorama. En su famoso artículo [S] de 1961, mostró que $V = L$ es incompatible con la existencia de cardinales medibles, y que el primer contraejemplo a GCH no puede ser medible.

Un cardinal $\kappa > \omega$ es *medible* sii existe una medida (bivaluada κ-completa no trivial) en $\mathcal{P}(\kappa)$. La importancia del trabajo de Scott trasciende su resultado: Scott tomó la ultrapotencia de V módulo una medida sobre κ, y consideró su colapso transitivo, M. M es un modelo interno, y la construcción produce una sumersión elemental (distinta de la identidad) $j : V \xrightarrow{\prec} M$. Keisler mostró poco después que la existencia de una tal sumersión es de hecho equivalente a la existencia de un medible. Todas las hipótesis de cardinales grandes con que nos toparemos en esta historia fueron definidas de acuerdo con este

[4] [Gö2], pg. 368.

patrón: en términos de la existencia de sumersiones elementales, con determinadas propiedades adicionales.

En esta sección introducimos cardinales grandes, y presentamos algunos de los argumentos típicos en esta área. El lector familiarizado con los conceptos de reflexión, ultrafiltro y sumersión, puede pasar tranquilamente al final de la sección, donde retomamos el resultado de Scott.

Definición 2.1 *Sean M y N dos modelos internos. $j : M \to N$ es una sumersión elemental sii para toda fórmula $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ en el lenguaje cuyo único símbolo no lógico es ϵ y para todos $a_1, \ldots, a_n \in M$,*

$$M \models \phi(a_1, \ldots, a_n) \iff N \models \phi(j(a_1), \ldots, j(a_n)).$$

Esta es formalmente una 'metadefinición', pues la relación $\models$ de satisfacción no es definible en general. Nótese que no hemos afirmado nada acerca de si j es o no definible en M.

De acuerdo con los modelos internos en que estemos trabajando, hay muchas posibilidades para el comportamiento de j. Por ejemplo, puede ser que $M \neq N$ pero que $j \restriction_{\mathrm{ORD}}$ sea la identidad[5]. Pero, si $N \subseteq M$ o si $M \models \mathsf{AC}$ entonces necesariamente ($N = M$ y j es la identidad, o) hay ordinales α con $j(\alpha) > \alpha$ (Es fácil verificar que para todo ordinal α, $j(\alpha)$ es un ordinal, y $j(\alpha) \geq \alpha$). Supondremos siempre que j es no-trivial, es decir, que no es la identidad (Si $M \prec N$, entonces $M = N$, así que realmente la no-trivialidad implica que j no puede ser la identidad). Todos los modelos internos que encontraremos son modelos de ZFC, así que siempre habrá ordinales que j mueve. El menor de ellos, que usualmente denotaremos κ, es llamado el *punto crítico* de j, $\mathrm{cp}(j)$.

Lema 2.2 *Con M, N, j, κ como arriba, $M \models \kappa$ es un cardinal regular y no enumerable.*

No hay mucho más que decir sin suponer más hipótesis, pues pueden darse ejemplos donde $M \models \kappa = \aleph_1$.[6] Este no puede ser el caso, sin embargo, si $N \subseteq M$.

Para un ordinal límite λ, recuérdese que $C \subseteq \lambda$ es *club* sii C es no acotado en λ, y es cerrado en la topología del orden, es decir, si $0 < \alpha < \lambda$, y $\sup(C \cap \alpha) = \alpha$, entonces $\alpha \in C$. $S \subseteq \lambda$ es *estacionario* sii $S \cap C \neq \emptyset$ para cada $C \subseteq \lambda$ club.

Definición 2.3 *Un cardinal λ es fuertemente inaccesible sii λ es regular y límite fuerte.*

Un cardinal fuertemente inaccesible λ es α-Mahlo ($\alpha \leq \lambda$) sii

---

[5] Reciente trabajo en el axioma de determinancia ha producido diversos ejemplos con esta propiedad; generalmente con $M = L(\mathbf{R}^M)$ y $N = L(\mathbf{R}^N)$.

[6] Una de las maneras de producir tales sumersiones es asumir que el ideal NS de los subconjuntos no-estacionarios de $\aleph_1$ es *saturado*. En este caso, forcing con $\mathbf{P} = \mathcal{P}(\aleph_1)/\mathsf{NS}$ produce un *ultrafiltro genérico* G tal que la ultrapotencia de V módulo G es bien-fundamentada, de modo que induce una sumersión $j : V \to N \subseteq V[G]$ con $\mathrm{cp}(j) = \aleph_1$.

1) $\alpha = 0$, *o*

2) $\alpha = \beta + 1$ *y* $\{\, \varrho < \lambda : \varrho$ *es* β*-Mahlo* $\}$ *es estacionario en* λ, *o*

3) α *es límite, y* λ *es* β*-Mahlo para todo* $\beta < \alpha$.

λ *es Mahlo sii es 1-Mahlo.*

Un cardinal fuertemente inaccesible λ *es débilmente compacto sii para cada* $R \subseteq V_\lambda$ *existe un* $X \supsetneq V_\lambda$, X *transitivo, y un* $S \subseteq X$ *tales que* $(V_\lambda, \in, R) \prec (X, \in, S)$.

Para dar una idea de qué tan fuertes son estas nociones, recuérdese que en ZFC no es posible demostrar la existencia de conjuntos que modelen ZFC.

El siguiente lema técnico es indispensable a partir de ahora:

Lema 2.4 (Mostowski) Si (X, E) *es una clase tal que* $X \models$ *Extensionalidad,* E *es bien fundamentada, y* $\forall a \in X\ \{\, x : xEa \,\}$ *es un conjunto (no necesariamente un elemento de* X*),* entonces *hay una única clase transitiva* $\tilde{X}$ *y un único isomorfismo* $\pi : (X, E) \to (\tilde{X}, \in)$. *Por definición,* $\tilde{X}$ *es el colapso (de Mostowski) de* X, *y* π *la función de colapso.*

Lema 2.5 *Si* λ *es inaccesible,* $V_\lambda \models \mathsf{ZFC}$.

De hecho, $V_\lambda \models \mathsf{ZFC} + \mathrm{Con}(\mathsf{ZFC}) + \mathrm{Con}(\mathsf{ZFC} + \mathrm{Con}(\mathsf{ZFC})) + \ldots$ Aquí, $\mathrm{Con}(T)$ denota la afirmación de que la teoría T es consistente.

En efecto: Si $X \prec V_\lambda$ es contable, $X \models \mathsf{ZFC}$, y si $N \cong X$ es transitivo entonces $N \in V_\lambda$. Así que $V_\lambda \models \exists M\, (M \models \mathsf{ZFC})$, de modo que $V_\lambda \models \mathrm{Con}(\mathsf{ZFC})$. Pero $X \prec V_\lambda$, así que $X \models \mathrm{Con}(\mathsf{ZFC})$. Luego $N \models \mathrm{Con}(\mathsf{ZFC})$, así que $V_\lambda \models \exists M\, (M \models \mathsf{ZFC} + \mathrm{Con}(\mathsf{ZFC}))$, etc[7].

Ahora bien, si λ es Mahlo, λ es inaccesible, pero más aún, es límite de inaccesibles, límite de inaccesibles que son límites de inaccesibles,... Además, de la hipótesis de que existe un cardinal Mahlo puede deducirse que la siguiente teoría es consistente:

$$\mathsf{ZFC} + \text{Existe un } \lambda \text{ inaccesible tal que } V_\lambda \prec V.$$

Esta teoría implica que hay una clase propia de inaccesibles en V, que son límites de inaccesibles, etc. Por ejemplo, λ es inaccesible, así que para cada $\alpha < \lambda$, V sabe que hay un inaccesible mayor que α. Como $V_\lambda \prec V$, este hecho

[7] Este argumento de hecho muestra más de lo dicho, pues lo que hemos mostrado no sólo es que en N vale $\mathrm{Con}(\mathsf{ZFC})$, etc., sino que existe un modelo *transitivo* de ZFC, en el que existe un modelo transitivo de ZFC, etc., lo cual es bastante más exigente. De hecho, si $M \models \mathsf{ZFC}$ es cualquier modelo transitivo de ZFC (y la existencia de tales M en consistencia es más débil que la de un cardinal inaccesible), o de hecho si simplemente M es un ω-modelo de ZFC, es decir, $V_\omega^M \cong V_\omega$, entonces $M \models \mathsf{ZFC} + \mathrm{Con}(\mathsf{ZFC}) + \ldots$ pues, por ejemplo, $\mathrm{Con}(\mathsf{ZFC})$ es una afirmación acerca de números naturales: ningún n es (el número de Gödel de) una demostración en ZFC de $0 = 1$.

se *refleja*, y V_λ también lo sabe, y por tanto los inaccesibles son no acotados en λ. Pero entonces V_λ piensa que hay una clase propia de inaccesibles, y por tanto (en V) hay una clase propia de inaccesibles.

Y si λ es débilmente compacto, entonces es Mahlo. De hecho, es λ-Mahlo, y límite de cardinales ϱ que son ϱ-Mahlos. La demostración de este hecho involucra otro argumento de reflexión, que puede resultar ilustrativo:

Comencemos notando que si $(V_\lambda, \in) \prec (X, \in)$, $V_\lambda \subsetneq X$, X transitivo, entonces $\lambda \in X$. Ahora bien: λ es inaccesible, es decir 0-Mahlo. Supongamos que $\alpha < \lambda$ y λ es α-Mahlo. Sea $C \subseteq \lambda$ club, y sean X transitivo, y $S \subseteq X$ tales que $(V_\lambda, \in, C) \prec (X, \in, S)$. Entonces $S \cap \lambda = C$, y S es club en $\bigcup S$, así que $\lambda \in S$. Luego,

$$X \models \exists \beta\, (\beta \text{ es } \alpha\text{-Mahlo} \wedge \beta \in S).$$

Por tanto, como $(V_\lambda, C) \prec (X, S)$, $\exists \beta\, (\beta\ \alpha\text{-Mahlo} \wedge \beta \in C)$. Esto muestra que $\{\, \beta < \lambda : \beta \text{ es } \alpha\text{-Mahlo} \,\}$ es estacionario en λ, y λ es $\alpha + 1$-Mahlo.

Luego, λ es necesariamente λ-Mahlo. Exactamente el mismo argumento establece ahora que el conjunto de cardinales $\varrho < \lambda$ que son ϱ-Mahlos, es estacionario en λ.

Lema 2.6 *Si $j : M \to N$, $\kappa = \mathrm{cp}(j)$, $N \subseteq M$, entonces $M \models \kappa$ es débilmente compacto.*

Dem. Supongamos M, N, j, κ como en las hipótesis. Es fácil ver que $V_\kappa^M = V_\kappa^N$. Ya sabemos que (en M) κ es regular, no contable. Mostremos que κ es límite. Si no, $\kappa = \lambda^+$. Pero entonces $j(\kappa) = j(\lambda^+) = \left(j(\lambda)^+\right)^N = (\lambda^+)^N \leq (\lambda^+)^M = \kappa$, porque $N \subseteq M$, así que toda función en N de λ sobre un ordinal, es un testigo en M de que ese ordinal es $< \lambda^+$. Pero esto contradice que $\kappa = \mathrm{cp}(j)$.

Un argumento similar establece que, de hecho, κ es límite fuerte.

Luego, κ es inaccesible. Consideremos $(V_\kappa, \in, R)^M$, donde $R \in M$ es un subconjunto de V_κ. $j((V_\kappa, \in, R)^M) = (V^N_{j(\kappa)}, \in, j(R))$, $V^N_{j(\kappa)}$ es transitivo, y $\kappa \in V^N_{j(\kappa)}$ porque $\kappa < j(\kappa)$. Por elementaridad de j, $j(R) \subseteq V^N_{j(\kappa)}$. Una sencilla aplicación del criterio de Tarski muestra que $(V_\kappa^M, \in, R) \prec (V^N_{j(\kappa)}, \in, j(R))$. Como R es arbitrario, esto demuestra que κ es débilmente compacto, como queríamos. □

Si $j : M \to N$, $j \restriction_L : L \to L$ es una sumersión elemental de L en sí mismo. Si $\kappa = \mathrm{cp}(j) = \mathrm{cp}(j \restriction_L)$, entonces κ es débilmente compacto en L.

Esto indica un fenómeno interesante. Por ejemplo, podemos tener $j : M \to N$ con $\mathrm{cp}(j) = \aleph_1$, y M tal que ninguno de sus cardinales sea inaccesible. *Pero sólo aparentemente*, porque de la existencia de j resulta que $\aleph_1^M$ es débilmente compacto, no en M, pero sí en uno de sus modelos internos, L. Así que debemos aceptar la consistencia de cardinales débilmente compactos, aunque el modelo en que trabajemos ni siquiera contenga inaccesibles[8].

Es conveniente en este punto introducir la jerarquía de consistencia:

[8] A decir verdad, debemos aceptar aun más: Si $j : L \to L$ tiene punto crítico κ, $L \models \kappa$ es

Definición 2.7 *Dadas dos teorías (r.e.)* T_1, T_2 *decimos que* $T_1 \preceq_* T_2$ *sii* $\mathrm{Con}(\mathrm{T}_1) \Rightarrow \mathrm{Con}(\mathrm{T}_2)$*, es decir, si*

$$\mathsf{ZF} \vdash \mathrm{Con}(T_1) \to \mathrm{Con}(T_2).$$

En general, asumiremos que T_1 *y* T_2 *extienden* ZFC*.*

Dos teorías T_1, T_2 *son equiconsistentes,* $T_1 \sim_* T_2$*, sii* $T_1 \preceq_* T_2 \preceq_* T_1$[9]*.*

Es un resultado empírico que para teorías "naturales" $\preceq_*$ es un pre-buen orden, y que las extensiones de ZFC con cardinales grandes parecen ser cofinales en $\prec_*$. De hecho, en diversas ocasiones es posible, dada T, hallar una extensión de ZF por axiomas de cardinales grandes equiconsistente con T. La idea es que 'es más y más difícil satisfacer' una teoría entre más y más cardinales grandes debamos aceptar. Por supuesto, esta idea informal requiere que nuestra interpretación de "axioma de cardinales grandes" sea en ocasiones algo liberal.

Decimos que un tal axioma es una *cota superior* para una teoría T sii de la consistencia de ZF (o ZFC) y dicho axioma se sigue la de T. Si la consistencia de T implica la de ZF y el axioma, decimos que es una *cota inferior*. En lo que sigue suprimimos en general la mención a ZFC y, al hablar de una teoría T, usualmente nos referimos en realidad a $\mathsf{ZFC} + T$.

Ejemplo 2.8 $\mathsf{ZF} \sim_* \mathsf{ZFC} \sim_* \neg\mathrm{Con}(\mathsf{ZFC}) \prec_* \mathrm{Con}(\mathsf{ZFC}) \prec_*$ *Existe un conjunto transitivo modelo de* $\mathsf{ZFC} \prec_* \ldots \prec_* \exists\kappa$ *inaccesible* $\prec_* \exists\kappa$ *Mahlo* $\prec_* \exists\kappa$ *2-Mahlo* $\prec_* \ldots \prec_* \exists\kappa\, \kappa$*-Mahlo* $\prec_* \exists\kappa$ *débilmente compacto* $\prec_*$ *hay una clase propia de cardinales débilmente compactos* $\prec_* \exists j : L \to L$*.*

Definición 2.9 $0^\sharp$ *existe* $\iff \exists j : L \to L$*.*

Nota 2.10 *De lo mencionado más arriba, y en la nota al pie de página 6, se sigue que la teoría "*NS *es saturado" es una cota superior para la existencia de* $0^\sharp$*. De hecho, esta teoría es muchísimo más fuerte. Los axiomas de cardinales grandes relevantes al problema de la exponenciación cardinal son todos más fuertes que* $0^\sharp$*.*

Hay bastante más que comentar acerca de $0^\sharp$, lo que haremos más adelante. Queremos preguntarnos ahora por la existencia de sumersiones $j : M \to N$ *definibles* en M.

---

débilmente compacto. Luego, si $\alpha < \kappa$,

$$L \models \exists\beta\,(\alpha < \beta < j(\kappa) \wedge \beta \text{ es débilmente compacto}),$$

y, por tanto, los débilmente compactos son no acotados en κ (de modo que son no acotados en $j(\kappa), j(j(\kappa)), \ldots$).

Nótese que en realidad los argumentos mostrados arriba permiten establecer que, para cualquier propiedad P, si $L \models P(\kappa)$, entonces $L \models \{\, \alpha < \kappa : L \models P(\alpha)\,\}$ es estacionario. Y lo mismo ocurre con $j(\kappa), j(j(\kappa)), \ldots$ Para otra aplicación de esta idea, ver los comentarios antes de la nota 2.17.

[9] Hay maneras algo más precisas y generales de definir $\prec_*$ (por ejemplo, ver [Wo]), pero ésta basta para nuestros propósitos.

Definición 2.11 *κ es medible $\iff$ $\exists j : V \to M \subseteq V$ para algún M transitivo, con* $\mathrm{cp}(j) = \kappa$.

Esta definición es equivalente a la dada al comienzo de esta sección: dada $j : V \to M$, $\mathcal{U} = \{ X \subseteq \kappa : \kappa \in j(X) \}$ es una medida en $\mathcal{P}(\kappa)$. Y, si $\mathcal{U}$ es una medida en $\mathcal{P}(\kappa)$, considérese la ultrapotencia de V módulo $\mathcal{U}$:

Definición 2.12 *Sea I un conjunto, $\mathcal{U}$ un ultrafiltro sobre I. Para $f, g : I \to V$ definimos $f \sim_{\mathcal{U}} g$ sii $\{ i \in I : f(i) = g(i) \} \in \mathcal{U}$. Es fácil ver que $\sim_{\mathcal{U}}$ es de equivalencia. Sea $[f] = [f]_{\mathcal{U}} = \{ g : I \to V : f \sim_{\mathcal{U}} g \wedge \mathrm{rk}\,(g)$ es minimal$\}$. La ultrapotencia de V módulo $\mathcal{U}$ es la estructura (clase propia) $(V^I/\mathcal{U}, E)$, donde $V^I/\mathcal{U} = \{ [f]_{\mathcal{U}} : f : I \to V \}$ y, para $[f], [g] \in V^I/\mathcal{U}$, $[f]E[g]$ sii $\{ i \in I : f(i) \in g(i) \} \in \mathcal{U}$.*

$[f]_{\mathcal{U}}$ no se define simplemente como la clase de equivalencia de f bajo $\sim_{\mathcal{U}}$ por razones puramente técnicas: en tal caso, $[f]_{\mathcal{U}}$ sería una clase propia, y no tendría sentido hablar de $V^I/\mathcal{U}$. Este truco, de restringir la clase a las funciones de rango mínimo, se debe a Dana Scott.

Lema 2.13 (Łoś) *Sean I y $\mathcal{U}$ como antes. Para $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ una fórmula y $f_1, \ldots, f_n : I \to V$,*

$$(V^I/\mathcal{U}, E) \models \varphi([f_1], \ldots, [f_n]) \quad \iff \quad \{ i \in I : \varphi(f_1(i), \ldots, f_n(i)) \} \in \mathcal{U}.$$

En particular, si para $x \in V$ definimos $c_x : I \to V$ por $c_x(i) = x$ para toda i, entonces $\tau : (V, \in) \to (V^I/\mathcal{U})$ es una sumersión elemental, donde $\tau(x) = [c_x]$ para todo x.

Nota 2.14 *Estas definiciones y el lema se generalizan para cualquier familia de estructuras. Por ejemplo, si $\mathcal{D}$ es un ultrafiltro sobre I y $(\mathcal{M}_i)_{i \in I}$ es una familia de órdenes lineales, su* ultraproducto *$\prod_{i \in I} \mathcal{M}_i/\mathcal{D}$ es un orden lineal. Las definiciones tienen sentido si $\mathcal{D}$ es simplemente un filtro o, de manera dual, un ideal, pero en tal caso el lema de Loś no es cierto en general; por ejemplo, el* producto reducido *de ordenes lineales puede no ser un orden total.*

Para mostrar que κ es medible con nuestra nueva definición si tenemos una medida $\mathcal{U}$, consideremos $V^\kappa/\mathcal{U}$. *Si* esta clase es bien fundamentada, *entonces* el lema del colapso de Mostowski garantiza que podemos hallar $M \cong V^\kappa/\mathcal{U}$ y, por tanto, si $\pi : V^\kappa/\mathcal{U} \to M$ es el colapso, y $\tau : V \to V^\kappa/\mathcal{U}$ es la sumersión elemental de V en su ultrapotencia, $j = \pi \circ \tau$ resulta como queremos.

Pero, como $\mathcal{U}$ es una medida κ-completa, $V^\kappa/\mathcal{U}$ es, en efecto, bien fundamentada: Supongamos que $\ldots E[f_2]E[f_1]E[f_0]$ es una cadena descendente infinita. Sea $A_n = \{ \alpha \in \kappa : f_{n+1}(\alpha) \in f_n(\alpha) \}$. Para cada n, $A_n \in \mathcal{U}$. Por κ-completitud, $\bigcap_{n \in \omega} A_n \in \mathcal{U}$. Sea α en la intersección. Entonces $f_0(\alpha) \ni f_1(\alpha) \ni f_2(\alpha) \ni \ldots$, una contradicción.

Nota 2.15 *Nótese que ω_1-completitud es suficiente para el argumento mostrado arriba. Esta es la razón por la cual tenemos la sumersión mencionada en la nota al pie de página 6.*

Si estamos trabajando con una clase M, y no necesariamente V, relativizamos todos los conceptos anteriores a M, es decir, sólo consideramos funciones $f : I \to M$ con $f \in M$, etc.

Ahora bien: Si κ es medible, $j : V \to M$ es la sumersión elemental descrita arriba, con $\mathrm{cp}(j) = \kappa$, y $\mathcal{U} = \mathcal{U}_j = \{ X \subseteq \kappa : \kappa \in j(X) \}$, entonces $\mathcal{U} \notin M$ (y, en particular, $M \neq V$). Esto, porque $j(\kappa)$ es medible en M, pero $|j(\kappa)| \leq |\{ f : f : \kappa \to \kappa \}| = 2^\kappa$, así que $j(\kappa)$ ni siquiera es inaccesible. La desigualdad vale porque si $\alpha < j(\kappa)$, con la notación introducida más arriba, $\alpha = \pi([f])$ para alguna $f : \kappa \to V$. Como $\alpha \in \mathrm{ORD}$, sin pérdida de generalidad (por el lema de Łoś), $f : \kappa \to \mathrm{ORD}$; es decir, $f \sim_{\mathcal{U}} f_1$ para alguna $f_1 : \kappa \to \mathrm{ORD}$, y podemos suponer $f = f_1$. Por el lema de Łoś, $\{ \beta < \kappa : f(\beta) < \kappa \} \in \mathcal{U}$ (recuérdese que $j(\kappa) = \pi(\tau(\kappa)) = \pi([c_\kappa])$). Así que sin pérdida de generalidad $f : \kappa \to \kappa$.

Corolario 2.16 *$\exists \kappa$ medible $\Longrightarrow V \neq L$.*

Nótese que si κ es medible, κ es débilmente compacto *en* M, porque $\mathcal{P}(V_\kappa) = V_{\kappa+1} = V^M_{\kappa+1}$, así que para cada $R \subseteq V_\kappa$, (V_κ, R) y $(V^M_{j(\kappa)}, j(R))$ están en M. Luego, $\kappa \in j(A)$, donde $A = \{ \alpha < \kappa : \alpha \text{ es débilmente compacto} \}$, y por definición de $\mathcal{U}_j$, $A \in \mathcal{U}_j$. Esto muestra que κ es límite de débilmente compactos, pero hay mucho más: *casi todos* los ordinales menores que κ son débilmente compactos y, en particular, A es estacionario en κ.

Nota 2.17 *La existencia de $0^\sharp$ es suficiente para demostrar que $V \neq L$. Pero $0^\sharp$ existe $\prec_* \exists \kappa$ medible.*

Teorema 2.18 (Scott) *Si κ es medible, κ* no *es el primer contraejemplo a* GCH. *De hecho, si $j : V \to M$ es testigo de que κ es medible, $2^\kappa > \kappa^+$ sii $\{ \lambda < \kappa : 2^\lambda > \lambda^+ \} \in \mathcal{U}_j$ y, del mismo modo, si $\beta < \kappa$, $2^\kappa \geq \kappa^{+\beta}$ sii $\{ \lambda < \kappa : 2^\lambda \geq \lambda^{+\beta} \} \in \mathcal{U}_j$ y $2^\kappa \geq \kappa^{+\kappa}$ sii $\{ \lambda < \kappa : 2^\lambda \geq \lambda^{+\lambda} \} \in \mathcal{U}_j$.*

3 Forcing. El Problema de los Cardinales Singulares

El siguiente gran avance en teoría de conjuntos, tanto en técnicas como en la concepción que conlleva, se debe a Paul Cohen, hacia 1963 ([Co]): el método de *forcing*, una técnica de inconmensurable utilidad en el establecimiento de resultados de consistencia. El método surgió de un modo inesperado, pues no se basa en las líneas de desarrollo que se investigaban en el momento, y resultó ser de gran contenido intuitivo y suficiente flexibilidad. Cohen utilizó su método para mostrar que $\neg$AC es consistente con ZF y $\neg$CH lo es con ZFC.

De manera bastante breve, forcing permite extender modelos transitivos de ZFC a 'nuevos' modelos transitivos. La ventaja de obtener modelos transitivos es que diversas nociones significan lo mismo en el modelo inicial y en el final (son *absolutas*). Esta extensión se realiza con suficiente cuidado, de modo que la teoría del modelo final puede 'controlarse' desde el inicial, llamado modelo base, y que con abuso de notación denotaremos V. Cada extensión de forcing requiere de un orden parcial (una *noción de forcing*), $(\mathbf{P}, \leq) \in V$,[10] que posee un máximo elemento $\mathbf{1}_{\mathbf{P}}$, y no posee mínimo. Considérese la topología en $\mathbf{P}$ donde un abierto sub-básico tiene la forma $U_p = \{ q \in \mathbf{P} : q \leq p \}$ para $p \in \mathbf{P}$. Decimos que p y q son compatibles si U_p y U_q son no-disyuntos. La intención es agregar a V un subconjunto G de $\mathbf{P}$, suficientemente genérico en el sentido de intersectar todos los abiertos densos de $\mathbf{P}$ que sean elementos de V, pero suficientemente restringido en el sentido de que todos sus elementos sean compatibles entre sí (esta es una simplificación de la definición formal). El modelo final, llamado modelo genérico y denotado $V[G]$, es el menor modelo transitivo que contiene a V y al que G pertenece.

Los elementos de $\mathbf{P}$ se denominan *condiciones*, y de acuerdo con qué condiciones satisfaga G (es decir, con qué $p \in \mathbf{P}$ pertenecen a G) la teoría de $V[G]$ (con parámetros) se determina por completo. Por supuesto, en V no puede saberse cómo es esta teoría, o G sería un elemento de V, así que se introduce un lenguaje con constantes (*nombres*) que representan los elementos de $V[G]$ y una relación $\Vdash$ 'de forzamiento'. Hay nombres canónicos $\check{x}$ para todos los elementos x de V, de modo que en toda extensión genérica se interpretan como tal elemento, y hay un nombre canónico para el genérico. El resultado fundamental es el siguiente:

Teorema 3.1 *Dado $(\mathbf{P}, \leq)$, para cualquier fórmula $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ y constantes $\dot{a}_1, \ldots, \dot{a}_n$, para cualquier genérico G, si $a_1, \ldots, a_n$ denotan las interpretaciones de estas constantes en $V[G]$,*

$$V[G] \models \varphi(a_1, \ldots, a_n) \iff \exists p \in G \, (p \Vdash \varphi(\dot{a}_1, \ldots, \dot{a}_n)).$$

Además, para cualquier $q \in \mathbf{P}$, $q \Vdash \varphi(\dot{a}_1, \ldots, \dot{a}_n)$ sii para todo H genérico con $q \in H$, $V[H] \models \varphi(b_1, \ldots, b_n)$, donde los b_i son las interpretaciones de los $\dot{a}_i$ en $V[H]$.

La relación $\Vdash$ es definible en V.[11]

Por supuesto, $\Vdash$, más precisamente $\Vdash_{(\mathbf{P}, \leq)}$, depende de $\mathbf{P}$, y el arte del asunto estriba en encontrar órdenes apropiados para forzar las propiedades que se deseen obtener al final[12].

[10] Usualmente éste es el caso, aunque en ocasiones deben considerarse órdenes que son clases definibles en V y no simplemente elementos.

[11] Más o menos. En realidad, para cada n, $\Vdash$ restringida a fórmulas Σ_n es definible.

[12] Los detalles formales del método son más intrincados. En la explicación dada, nosotros estamos suponiendo la existencia de modelos transitivos de ZFC, o de la teoría T en discusión,

Casi enseguida a su aparición, Robert Solovay generalizó el trabajo de Cohen para mostrar que GCH puede fallar con cierta libertad:

- $2^{\aleph_0}$ puede ser cualquier κ de cofinalidad mayor que ω, y (como corolario) GCH puede fallar en cualquier número de cardinales, es decir, para cada κ es consistente con ZFC que haya al menos κ contraejemplos a GCH, κ valores de λ para los cuales $2^\lambda > \lambda^+$.

- Algo más flexible, dados finitos cardinales regulares $\kappa_0 \leq \ldots \leq \kappa_n$, y valores correspondientes $\lambda_0 \leq \ldots \leq \lambda_n$, si $\forall i \leq n\, (\kappa_i^+ \leq \lambda_i$ y $\mathrm{cf}\,(\lambda_i) > \kappa_i)$ entonces es consistente con ZFC que $2^{\kappa_i} = \lambda_i$, $i \leq n$.

William Easton [E], en su tesis de doctorado en 1964, estableció un resultado mucho más general:

Teorema 3.2 *Sea F una función (definible) de los cardinales regulares en los cardinales tal que*

i) $\forall \kappa\, (\mathrm{cf}\, F(\kappa) > \kappa)$

ii) $\forall \kappa, \lambda\, \big(\kappa \leq \lambda \to F(\kappa) \leq F(\lambda)\big)$.

Entonces hay una noción de forcing $\mathbf{P}$ *(una clase propia) tal que*

$$\mathbf{1}_{\mathbf{P}} \Vdash \forall \kappa\, (2^\kappa = \check{F}(\kappa)).$$

$\mathbf{P}$ preserva cofinalidades (y por tanto cardinales), de modo que i) y ii) son necesarios: ii) es monotonía de la exponencial, y i) es el lema de König (Decimos que $\mathbf{P}$ preserva cofinalidades sii para todos κ, λ, y todo G genérico, $V \models \mathrm{cf}\,(\kappa) = \lambda$ sii $V[G] \models \mathrm{cf}\,(\kappa) = \lambda$). Lo asombroso es que, además, son suficientes. Esto da, por supuesto, una inmensa libertad en el comportamiento de la función exponencial (aunque algunas restricciones se aplican, como el teorema de Scott 2.18. En realidad, el forcing de Easton destruye varias nociones de cardinales grandes, como medibilidad).

En cambio, el método de Easton no da absolutamente ninguna libertad al exponencial de los cardinales singulares, por cuanto SCH vale en los modelos que se construyen así.

Definición 3.3 SCH*, la hipótesis de los cardinales singulares, es la afirmación*

$$\forall \kappa\, \textit{singular}\, (\kappa^{\mathrm{cf}\,(\kappa)} = \kappa^+ + 2^{\mathrm{cf}\,(\kappa)}).$$

Bajo SCH conociendo la función F y la función $\mu \mapsto \mathrm{cf}\,\mu$, la exponenciación está determinada por completo:

para obtener por via de forcing la consistencia de T con alguna hipótesis adicional. Esto no es necesario, y ZFC es suficiente. Pero no entraremos aquí en detalles de cómo modificar la explicación dada.

Lema 3.4 *Si* SCH *es cierta, entonces*

- *Si κ es singular,*

$$2^\kappa = \begin{cases} 2^{<\kappa} & \textit{si la exponencial es finalmente constante bajo } \kappa \\ (2^{<\kappa})^+ & \textit{en otro caso.} \end{cases}$$

- *Si κ, λ son infinitos,*

$$\kappa^\lambda = \begin{cases} 2^\lambda & \textit{si } \kappa \leq 2^\lambda \\ \kappa & \textit{si } \kappa > 2^\lambda \textit{ y } \lambda < \operatorname{cf}\kappa \\ \kappa^+ & \textit{en otro caso.} \end{cases}$$

El problema de los cardinales singulares consiste en determinar los comportamientos consistentes de la exponencial. Por el resultado de Easton, podemos reformularlo como determinar con qué libertad puede violarse SCH.

Primero que todo, hay ciertas restricciones. Por ejemplo, si $\forall\alpha\,(2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+\beta})$, entonces $\beta < \omega$ (por el teorema de Bukovský y Hechler; ver [J], ex. 6.6).

O, si $\aleph_\omega$ es límite fuerte, entonces $\aleph_\omega^{\aleph_0} \neq \aleph_{\omega_1}$ (ver [J], ex. 6.19 y 6.20).

Durante algún tiempo se pensó que en el resultado de Easton la limitación a regulares era sólo debida a una debilidad de la prueba. Así, salvando los obstáculos del tipo de los arriba anotados, se esperaba que pudiera mostrarse que la exponencial podía ser, en esencia, arbitraria.

Jack Silver [Sil2], en 1974, mostró que esto no era así: Por ejemplo, si κ es singular límite fuerte, y $\operatorname{cf}\kappa > \omega$, κ no es el primer contraejemplo a GCH. Compárese su resultado con el de Scott:

Teorema 3.5 *Sean $\lambda > \operatorname{cf}\lambda = \kappa > \omega$, un ordinal $\mu < \kappa$, y una sucesión $(\lambda_\alpha)_{\alpha<\kappa}$ estrictamente creciente y continua de cardinales, que converge a λ. Entonces:*

a) Si λ es κ-cerrado (es decir, $\forall\varrho < \lambda\,(\varrho^\kappa < \lambda)$), y $\{\,\alpha < \kappa : \prod_{\beta<\alpha}\lambda_\beta \leq \lambda_\alpha^{+\mu}\,\}$ es estacionario, entonces

$$\lambda^\kappa = \lambda^{\operatorname{cf}\lambda} \leq \lambda^{+\mu}.$$

Nótese que, por ejemplo, λ es κ-cerrado si $\forall\tau < \lambda\,(2^\tau < \lambda^\kappa)$. En ese caso, $2^\lambda \leq \lambda^{+\mu}$.

Luego, si $\{\,\alpha < \kappa : \lambda_\alpha^{\operatorname{cf}\lambda_\alpha} = \lambda_\alpha^+\,\}$ es estacionario entonces $\lambda^{\operatorname{cf}\lambda} = \lambda^+$.

En particular, SCH *para los cardinales de cofinalidad ω implica* SCH*.*

b) Si λ es límite fuerte y $\{\,\alpha < \kappa : \prod_{\beta<\alpha}\lambda_\beta \leq \lambda_\alpha^{+\mu}\,\}$ es estacionario entonces $2^\lambda \leq \lambda^{+\mu}$.

En particular, si $\{\,\sigma < \lambda : 2^\sigma \leq \sigma^{+\mu}\,\}$ es estacionario entonces $2^\lambda \leq \lambda^{+\mu}$.

La demostración de Silver usaba forcing y ultrapotencias, y ha sido simplificada mucho desde entonces. Ver, p. ej., [BaP] o [Ku2]. ¿Acaso, entonces, es SCH un teorema? Silver practicamente había reducido el problema a singulares de cofinalidad ω. Quizás más allá del resultado de Easton realmente no había ninguno adicional.

Pero ya desde 1971, del trabajo de Prikry [P], se había establecido que si hay un medible que viole GCH, entonces es consistente que falle SCH, y Silver [Sil1] había mostrado que, suponiendo la existencia de cardinales bastante más grandes que un medible, es consistente tener un medible κ con $2^\kappa > \kappa^+$. Ésta, sin embargo, resultó una hipótesis más fuerte de lo imaginado. Kunen [Ku1] probó, usando modelos internos y ultrapotencias iteradas, que implica la consistencia de la existencia de tantos medibles como se desee (i.e., para cada α Kunen construyó un modelo de ZFC con al menos α medibles). La hipótesis usada por Silver es la existencia de cardinales supercompactos (en realidad, un poco menos). Un cardinal supercompacto es una generalización 'natural' de un medible, basada en la formulación con sumersiones elementales.

El resultado de Silver-Prikry ocurría en un cardinal que antes de la extensión por forcing era medible, y por tanto era ahora un singular *muy* grande. Dos preguntas naturales se presentaban: ¿Cuál es el mínimo singular en el que SCH puede fallar? y ¿puede un singular ser el primer contraejemplo a GCH? Respecto a la segunda pregunta, cabe notar que en el modelo de Silver-Prikry, si κ es el singular que viola SCH, hay κ contraejemplos a GCH menores que él, debido al resultado de Scott, ya que el forcing no cambia V_κ. Si trata de reorganizarse GCH bajo κ mediante los métodos usuales de forcing, muchos cardinales menores que κ colapsan, de modo que κ cesa de ser un contraejemplo.

4 El Lema de Cubrimiento. El Primer Contraejemplo a SCH

Antes de ver lo ocurrido con estas preguntas debemos destacar otro resultado que indicó que la necesidad de la presencia de cardinales grandes. En 1975 apareció un artículo que ayudó a aclarar la relación entre V y L, [DJe]. De hecho, esta relación sufre una diferencia radical de acuerdo con la existencia o no de $0^\sharp$.

Ronald Jensen, quien en [Je1] retomaba el estudio de L, basado en las propiedades de sus etapas iniciales (en realidad, en las etapas J_α de una jerarquía diferente de la usada por Gödel), y lo orientaba de manera sistemática, desarrollando lo que ahora se conoce como estructura fina, mostró en el artículo del 75 (escrito con Devlin) que si $0^\sharp$ no existía, V y L eran muy parecidos. Con más detalle, valía el *lema de cubrimiento*:

Teorema 4.1 *Si $0^\sharp$ no existe, entonces para cualquier $X \subseteq \mathrm{ORD}$ no contable, existe $Y \in L$ tal que $X \subseteq Y \subseteq \mathrm{ORD}$ y $|X| = |Y|$.*

Hay muchas hipótesis equivalentes a la existencia de $0^\sharp$. De hecho, bajo una de estas formulaciones, la negación del lema de cubrimiento es una consecuencia trivial; por ejemplo, $0^\sharp$ implica que todos los cardinales no contables en V son débilmente compactos en L. El lema de cubrimiento implica con relativa facilidad SCH, así que $\neg\mathsf{SCH}$ implica la existencia de $0^\sharp$. El trabajo de Jensen es de tal significado e influjo que, por ejemplo, Kanamori ha llamado apropiadamente al lema de cubrimiento el resultado más importante en teoría de conjuntos en la década del 70, ver [K].

Teorema 4.2 *Si vale el lema de cubrimiento, entonces también vale* SCH.

Dem. Sea κ singular, y supongamos que $2^{\mathrm{cf}\,\kappa} < \kappa$. Queremos mostrar que $\kappa^{\mathrm{cf}\,\kappa} = \kappa^+$. Para esto, es suficiente mostrar que $[\kappa]^{\mathrm{cf}\,\kappa}$, la colección de subconjuntos de κ de tamaño $\mathrm{cf}\,\kappa$, tiene cardinal a lo más κ^+. Mostraremos que, de hecho, tiene a lo más cardinal $(\kappa^+)^L$.

Sea, pues, $X \in [\kappa]^{\mathrm{cf}\,\kappa}$. Usando el lema de cubrimiento, sea $Y = Y_X \in L$ tal que $\omega_1 \cup X \subseteq Y \subseteq \kappa$ y $|Y| = |X| + \omega_1$ (de este modo, no tenemos que tratar por aparte el caso $\mathrm{cf}\,\kappa = \omega$). Esto demuestra que vale la siguiente igualdad:

$$[\kappa]^{\mathrm{cf}\,\kappa} = \bigcup \{ [Y]^{\mathrm{cf}\,\kappa} : Y \in L \cap [\kappa]^{\mathrm{cf}\,\kappa + \omega_1} \}.$$

Considérese un Y como arriba. $|[Y]^{\mathrm{cf}\,\kappa}| = (\omega_1 + \mathrm{cf}\,\kappa)^{\mathrm{cf}\,\kappa} = 2^{\mathrm{cf}\,\kappa} < \kappa$. Luego, $|[\kappa]^{\mathrm{cf}\,\kappa}| \leq \kappa \cdot |L \cap [\kappa]^{\mathrm{cf}\,\kappa + \omega_1}| \leq |\mathcal{P}(\kappa)^L| = (\kappa^+)^L$. $\Box$

Nota 4.3 *Nótese que el argumento muestra que si* $2^{\mathrm{cf}\,\kappa} < \kappa$*, entonces* $\kappa^+ = (\kappa^+)^L$*. Con el lema de cubrimiento, esta igualdad vale, suponiendo simplemente que* κ *es singular. Esto en sí es interesante, pues si* κ *es regular, es fácil con forcing hacer* $\kappa^+ > (\kappa^+)^L$ *(sin cambiar* V_κ*). Pero para hacer lo mismo con* κ *singular, debemos asumir cardinales grandes. Al menos,* $0^\sharp$*, pero de hecho bastante más.*

Diversas generalizaciones y versiones apropiadas del lema de cubrimiento para modelos internos 'naturales' más amplios que L (es decir, modelos canónicos como L que admiten cardinales grandes cuya existencia contradice $V = L$) se han desarrollado desde entonces. Jensen mismo, Dodd, Mitchell, Koepke, Steel y Woodin han sido los directos responsables de estos resultados. Por ejemplo, en trabajo publicado a comienzos de la década del 80 ([DoJe1,2,3], [Do]), Jensen y Anthony Dodd introdujeron la primera versión del *core model*, $\mathbf{K}$, probaron una versión débil del lema de cubrimiento para $\mathbf{K}$, y la usaron para mostrar que $\exists\kappa$ medible $\prec_* \neg\mathsf{SCH}$.

Esto apoyaba la hipótesis de que alguna forma débil de SCH debía ser válida, desarrollada desde el trabajo de Silver, que pronto fue generalizado por Galvin y Hajnal [GH] en un contexto puramente combinatorio, pero aún restringidos a cardinales de cofinalidad $> \omega$. Las desigualdades mostradas en [GH] están relacionadas con rangos asignados a funciones y filtros en estos cardinales. Un ejemplo de tales desigualdades, que no menciona estos elementos, es que si $\aleph_\lambda$ es límite fuerte de cofinalidad no contable, entonces

$$2^{\aleph_\lambda} < \aleph_{(2^{|\lambda|})^+}.$$

Esta hipótesis fue confirmada en 1974 por Robert Solovay, [So]. Solovay estableció otro resultado absoluto que dependía de la existencia de cardinales grandes: SCH es *finalmente* cierta. Más específicamente, si κ es un cardinal fuertemente compacto, entonces $\forall\lambda$ singular $> \kappa\,(\lambda^{\mathrm{cf}\,\lambda} = 2^{\mathrm{cf}\,\lambda} + \lambda^+)$. Esto implica, por ejemplo, que en presencia de cardinales fuertemente compactos $2^\kappa = \kappa^+$ para una clase propia de cardinales κ.

Definición 4.4 *κ es fuertemente compacto sii todo filtro κ-completo (sobre cualquier cardinal) puede extenderse a un ultrafiltro κ-completo.*

En particular, κ es medible. En consistencia, compacidad fuerte es mucho más fuerte que medibilidad, pero Magidor mostró que es consistente que (si existe) el primer cardinal fuertemente compacto es de hecho el primer medible.

Teorema 4.5 *Si κ es fuertemente compacto, y $\lambda > \kappa$ es singular, $\lambda^{\mathrm{cf}\,\lambda} = \lambda^+ + 2^{\mathrm{cf}\,\lambda}$.*

Magidor, en 2 artículos aparecidos casi simultáneamente en 1977, [Ma1,2], mostró que módulo ciertos cardinales grandes —mayores que fuertemente compactos— $\aleph_\omega$ podía contradecir SCH y, de hecho, ser el primer contraejemplo a GCH, resolviendo de forma inesperada las dos preguntas arriba planteadas. Magidor conseguía un modelo donde $\aleph_\omega$ era límite fuerte y $2^{\aleph_\omega} = \aleph_{\omega+\alpha+1}$, para cualquier $\alpha \leq \omega$ preestablecido.

A comienzos de la década del 90, trabajo con core models y forcing permitió establecer las hipótesis de cardinales grandes equiconsistentes con $\neg$SCH. Volveremos sobre esto más adelante.

5 La teoría de pcf de Shelah

Además del trabajo con modelos internos y con forcing, hay una tercera corriente que podemos mencionar ahora, y es la que se refiere a resultados absolutos, sobre todo al establecimiento de cotas para la exponenciación del tipo de las obtenidas por Hajnal y Galvin. Esta corriente corresponde a los trabajos de Shelah que desembocaron en su teoría de pcf.

Ya en el 80 Shelah obtuvo algunas cotas ([Sh1]), pero el primer resultado realmente asombroso apareció en 1982, en [Sh2]. Aquí Shelah demostró, en directa analogía con [GH], que

$$\aleph_\omega^{\aleph_0} < \aleph_{(2^{\aleph_0})^+}.$$

Ésta, y cotas análogas para otros cardinales, se obtuvieron en medio de sus investigaciones en versiones combinatorias de teoremas que generalizasen el lema de cubrimiento. Fue la primera cota conseguida para la exponenciación de cardinales de cofinalidad ω, contradiciendo la que ahora se iba estableciendo como la hipótesis dominante, a saber: que no existían tales cotas.

La demostración de Shelah usaba fuertemente algunas ideas que había introducido previamente en un contexto distinto (álgebras de Jónsson), referentes a la cofinalidad de ultraproductos. Shelah encaminó su trabajo entonces en esta dirección, y a fines de los 80 había desarrollado la rica teoría de pcf cuyos frutos muestra en [Sh5]. Ver también [BuMa].

pcf es una abreviatura de '$p$ossible cofinalities', y la teoría investiga las relaciones estructurales entre conjuntos de cardinales (regulares) y las cofinalidades de sus ultraproductos. Es una teoría muy fértil, y en manos de Shelah ha encontrado aplicaciones muy diversas. La teoría ha hallado uso en la investigación de la existencia de cardinales de Jónsson (otros cardinales grandes que no hemos mencionado), en el estudio de lenguajes infinitarios, en diversos problemas de álgebra, en aritmética cardinal, etc. Ver [Sh4].

Respecto a sus aplicaciones en aritmética, una de las principales es el establecimiento de la cota

$$2^{\aleph_0} < \aleph_\omega \longrightarrow \aleph_\omega^{\aleph_0} < \aleph_{\omega_4},$$

además de resultados como que si $\aleph_\omega$ es límite fuerte entonces $2^{\aleph_\omega}$ es regular, lo que en particular implica que no puede ser $\aleph_{\omega_1}$, siendo así un resultado mucho más fuerte que uno de los que mencionamos previamente.

El resto de esta sección esta dedicado a mencionar (muy brevemente) algunos de los conceptos y resultados de la teoría de Shelah. Debido a la brevedad, no explicaremos las principales ideas detrás de los resultados. De hecho, podríamos incluso eliminar la mención a los ideales $J_{<\lambda}$, pero los incluimos para dar una muy vaga idea de por qué cabría esperar un resultado como el lema 5.4, más adelante.

Definición 5.1 *Sea $\mathfrak{a}$ un conjunto de cardinales regulares, $|\mathfrak{a}|^+ < \text{mín}(\mathfrak{a})$, y supongamos que $\mathfrak{a}$ no tiene máximo.*

Para $\mathcal{D}$ un ultrafiltro sobre $\mathfrak{a}$, sea $\prod \mathfrak{a}/\mathcal{D} = \prod_{\kappa\in\mathfrak{a}}(\kappa,\in)/\mathcal{D}$. Como mencionamos previamente, éste es un orden lineal.

$$\begin{aligned}\text{pcf}(\mathfrak{a}) &= \{\, \lambda : \textit{hay un ultrafiltro } \mathcal{D} \textit{ sobre } \mathfrak{a} \textit{ tal que } \text{cf}\,(\textstyle\prod \mathfrak{a}/\mathcal{D}) = \lambda \,\} \\ J_{<\lambda}(\mathfrak{a}) &= \{\, \mathfrak{b} \subseteq \mathfrak{a} : \textit{para todo ultrafiltro } \mathcal{D} \textit{ sobre } a\,(\mathfrak{b}\in\mathcal{D} \Rightarrow \text{cf}\,(\textstyle\prod \mathfrak{a}/\mathcal{D}) < \lambda) \,\}.\end{aligned}$$

Lema 5.2

i) $|\text{pcf}(\mathfrak{a})| \leq 2^{|\mathfrak{a}|}$.

ii) $\text{pcf}(\mathfrak{a})$ *tiene un máximo elemento,* $\text{máx}\,\text{pcf}(\mathfrak{a}) = \text{cf}\,(\prod \mathfrak{a})$. *Aquí, para $f, g \in \prod \mathfrak{a}$, definimos $f < g$ sii para todo $\kappa \in \mathfrak{a}$ $f(\kappa) < g(\kappa)$.*

iii) $\forall \kappa \in \mathrm{pcf}(\mathfrak{a})\, \exists \mathfrak{b}_\kappa \subseteq \mathfrak{a}$ *tal que* $\kappa = \text{máx}\ \mathrm{pcf}(\mathfrak{b}_\kappa) \notin \mathrm{pcf}(\mathfrak{a} \setminus \mathfrak{b}_\kappa)$.

iv) $J_{<\lambda}$ *es el ideal sobre* $\mathfrak{a}$ *generado por* $(\mathfrak{b}_\kappa)_{\kappa<\lambda}$.

v) $\mathrm{tcf}(\prod \mathfrak{b}_\kappa / J_{<\kappa}) = \kappa$ *(ver la nota al pie de página 2).*

Definición 5.3 *Sea λ un cardinal singular, $\kappa = \mathrm{cf}\,\lambda$. $\mathrm{PP}(\lambda)$ es el conjunto de cardinales ϱ tales que hay un conjunto $\mathfrak{a}$ de cardinales regulares, cofinal en λ, y un ultrafiltro $\mathcal{D}$ sobre $\mathfrak{a}$ (que no contiene subconjuntos acotados de λ) tales que $\varrho = \mathrm{cf}\ (\prod \mathfrak{a}/\mathcal{D})$.*

$\mathrm{pp}(\lambda)$ es el supremo de $\mathrm{PP}(\lambda)$.

Este concepto es tan básico para la teoría, que Shelah llama a $\mathrm{pp}(\lambda)$ una 'seudoexponencial' (el lema siguiente explica el por qué). Un ejemplo de las ventajas de $\mathrm{pp}(\lambda)$ con respecto a las exponenciales usuales es que es más difícil modificarla con forcing.

Lema 5.4

- *Si $\kappa = \mathrm{cf}\,\lambda < \lambda$, $\mathrm{pp}(\lambda) \leq \lambda^\kappa$. Si λ es κ-cerrado, es decir, $\varrho^\kappa < \lambda$ para todo $\varrho < \lambda$, y $\lambda < \aleph_\lambda$, la igualdad se cumple.*
- *$\mathrm{PP}(\lambda)$ es un intervalo de cardinales regulares, su mínimo es λ^+.*
- *Si $\mathfrak{a}$ es un intervalo de cardinales regulares, también lo es $\mathrm{pcf}(\mathfrak{a})$.*

Es con este lema que pueden obtenerse cotas en la exponencial de cardinales singulares, pues si $\mathrm{pp}(\lambda) = \lambda^{\mathrm{cf}\,\lambda}$, y se conoce $|\mathrm{PP}(\lambda)|$, como $\mathrm{PP}(\lambda)$ es un intervalo, de hecho se conoce una cota para $\mathrm{pp}(\lambda)$.

Teorema 5.5

a) *Sea $\mathfrak{a}$ un intervalo de regulares, sin máximo, $|\mathfrak{a}|^+ < \text{mín}(\mathfrak{a})$, $(\text{mín}(\mathfrak{a}))^{|\mathfrak{a}|} < \sup(\mathfrak{a})$. Entonces $\text{máx}\ \mathrm{pcf}(\mathfrak{a}) = |\prod \mathfrak{a}|$. En particular, bajo las hipótesis dadas, $|\prod \mathfrak{a}|$ es regular.*

b) *Si λ es límite, $\aleph_\lambda^{\mathrm{cf}\,\lambda} < \aleph_{(|\lambda|^{\mathrm{cf}\,\lambda})^+}$.*

Corolario 5.6

a) *$\aleph_\lambda^{|\lambda|} < \aleph_{(2^{|\lambda|})^+}$ para λ límite. En particular, si $\aleph_\omega$ es límite fuerte, $2^{\aleph_\omega} < \aleph_{(2^{\aleph_0})^+}$.*

b) *Si $2^{\aleph_0} < \aleph_\omega$ entonces $\aleph_\omega^{\aleph_0}$ es regular.*

Combinatoria más delicada que la usada para mostrar los anteriores teoremas, permite establecer el resultado principal de la teoría de Shelah en términos de aritmética cardinal. Por ejemplo,

Teorema 5.7 *Si δ es límite, $\delta < \aleph_{\alpha+\delta}$, entonces $\mathrm{pp}(\aleph_{\alpha+\delta}) < \aleph_{\alpha+|\delta|^{+4}}$. Por ejemplo, $\mathrm{pp}(\aleph_\omega) < \aleph_{\omega_4}$. Esto implica que si $2^{\aleph_0} < \aleph_\omega$ entonces $\aleph_\omega^\omega < \aleph_{\omega_4}$ y por tanto, si $\aleph_\omega$ es límite fuerte, $2^{\aleph_\omega} < \aleph_{\omega_4}$.*

Nota 5.8 *Básicamente, el teorema establece un resultado del estilo* $|\mathrm{pcf}(\mathfrak{a})| < |\mathfrak{a}|^{+3}$, *para* $\mathfrak{a}$ *un intervalo de regulares. Es un problema abierto el saber si puede tenerse* $|\mathrm{pcf}(\mathfrak{a})| > |\mathfrak{a}|$. *Si esto no ocurre, el 4 en el teorema pasaría a ser un 2. Un resultado de Jech y Shelah [JSh] muestra que si se desease remplazar este 2 por un 1, se necesitaría un argumento completamente distinto.*

Shelah también estableció resultados referentes al primer contraejemplo a SCH que permitieron a Gitik establecer más adelante la hipótesis de cardinales grandes equiconsistente con $\neg$SCH. Cerramos la sección con este teorema:

Teorema 5.9 *Si* λ *es el primer contraejemplo a* SCH, *es decir, el primer cardinal que satisface* $\lambda^{\mathrm{cf}\,\lambda} > \lambda^+ + 2^{\mathrm{cf}\,\lambda}$, *entonces* $\mathrm{cf}\,\lambda = \aleph_0$, $\forall \mu < \lambda\, (\mu^{\aleph_0} \leq \mu^+ + 2^{\aleph_0})$ *y* $\mathrm{pp}(\lambda) \geq \lambda^{++}$.

6 Cotas Inferiores

Regresemos un poco, y mencionemos algunos de los resultados obtenidos mediante la teoría de core models.

El estado actual de la teoría en gran medida se debe a William Mitchell y John Steel. Sus trabajos extienden los de Dodd y Jensen, quienes habían introducido el modelo $\mathbf{K}$ (una restricción de la clase $L[\mathcal{U}]$ de Silver y Kunen, donde puede habitar un medible, pero no necesariamente mucho más).

Como hemos notado, las sumersiones han estado presentes en esta historia desde hace bastante, siendo $0^\sharp$ el primer ejemplo. Para $a \subset \omega$, de manera análoga puede definirse $a^\sharp$ en términos de la existencia de una sumersión elemental no trivial $\pi : L[a] \overset{\prec}{\longrightarrow} L[a]$. Aquí, $L[a]$ es (más o menos) la clase de conjuntos construibles con ayuda de un parámetro que representa a. La existencia de $0^\sharp$ es equivalente a la existencia de cierto subconjunto de ω, así que pueden definirse $0^{\sharp\sharp}, 0^{\sharp\sharp\sharp}, \dots$ y, con generalizaciones naturales, se obtiene una sucesión *muy* larga —que va "más allá", incluso, de ORD— de $0^{(\alpha)\sharp}$. Los miembros de tal sucesión son conocidos en este contexto como *ratones*. Admitiendo todos estos ratones se obtiene una primera versión de $\mathbf{K}$, y puede irse más allá, mirando de nuevo sumersiones $\pi : \mathbf{K} \overset{\prec}{\longrightarrow} \mathbf{K}$ (seguimos aquí la exposición de Jensen en [Je2]).

Mitchell introdujo la idea de trabajar no con un medible κ y una medida sobre κ, sino con sucesiones de estas medidas. Para esto, comenzó definiendo un orden o en la familia de medidas normales sobre κ, que lleva a toda una jerarquía de cardinales grandes. La idea es generalizar las nociones de α-Mahlo de manera apropiada para cardinales medibles. Es fácil ver que toda medida normal sobre κ contiene todos los clubs, así que todo elemento de cualquier medida normal es estacionario. Una posible manera de definir una noción de cardinal grande bastante mayor que un medible es pedir que κ sea medible, y que $\{\, \alpha < \kappa : \kappa \text{ es medible} \,\}$ sea estacionario en κ. El orden o de Mitchell (ver [Mi1]) introduce una jerarquía más exigente:

Definición 6.1 *$o(\kappa) = \{ o(U) : U$ es medida normal sobre $\kappa \}$. Aquí, $o(U) = \{ o(U') : U' \lhd U \}$, donde $U \lhd U'$ sii U pertenece al colapso de la ultrapotencia de V módulo U'.*

Usando el lema de Łoś, es fácil ver que $U \lhd U'$ sii hay un conjunto I de U'-medida 1 tal que todo $\alpha \in I$ es medible, y hay medidas normales U_α sobre α para cada $\alpha \in I$, tales que para cualquier $X \subseteq \kappa$, $X \in U$ sii $\{ \alpha \in I : X \cap \alpha \in U_\alpha \} \in U'$.

Este orden o resulta ser bien fundamentado, de modo que o está bien definido, y es un ordinal. De hecho, $o(\kappa) \leq (2^\kappa)^+$. Si $o(\kappa) \geq \alpha + 1$, entonces hay una medida U sobre κ con $\{ \varrho : o(\varrho) \geq \alpha \} \in U$. Así, $o(\kappa) \geq 1$ sii κ es medible, y si $o(\kappa) \geq 2$, κ es límite de medibles, que son límites de medibles, que son límites de medibles, etc. El argumento es el mismo que hemos encontrado varias veces ya: Hay una medida U tal que κ es medible en M, el ultraproducto módulo U, así que en V κ es límite de medibles. Esto vale en M, luego en V κ es límite de medibles que son límites de medibles, etc.

Dada cualquier sumersión $j : V \to M$, $\mathrm{cp}(j) = \kappa$, es posible que j no esté dada por una medida, pero las medidas pueden usarse para aproximarla. En general, muchas nociones de cardinales grandes definidas en términos de sumersiones, están más allá del alcance de lo que el orden de Mitchell permite expresar. Por ejemplo, si $V_{\kappa+2} \in M$, toda medida sobre κ está en M. Si $U = \mathcal{U}_j = \{ X \subseteq \kappa : \kappa \in j(X) \}$, y $j_U : V \to N$ es la sumersión dada por U, entonces $U \notin N$, así que $N \neq M$. De hecho, hay una sumersión no trivial $\pi_U : N \to M$ de modo que $j = \pi_U \circ j_U$. Es fácil verificar que $V_{\kappa^+} = (V_{(\kappa^+)^N})^N = (V_{(\kappa^+)^M})^M$, así que $\mathrm{cp}(\pi_U) \geq (\kappa^{++})^N > \kappa^+$. Si $o(\kappa)^N < (\kappa^{++})^N$, por elementaridad $o(\kappa)^M = o(\kappa)^N$. Pero $o(\kappa)^N = o(\kappa)$, ya que todas las medidas sobre κ están en N. Sin embargo, $o(\kappa)^N = o(U) < o(\kappa)$, y tenemos una contradicción. Si vale GCH, esto muestra que $N \models o(\kappa) = \kappa^{++}$ (ya que $o(\kappa) \leq (2^\kappa)^+$), y por tanto $\{ \alpha < \kappa : o(\alpha) = \alpha^{++} \} \in U$, y en consistencia la existencia de una sumersión como j está mucho más allá de la existencia de un κ de orden de Mitchell el máximo posible.

Qué posibles órdenes parciales pueden sumergirse en $(\{\text{medidas sobre } \kappa\}, \lhd)$ fue por algún tiempo un problema bastante difícil, y sólo hasta hace pocos años pudo obtenerse una respuesta completa (ver [B], [Cu2,3], [W]). En los modelos internos definidos por Mitchell, en los que GCH es cierta, $\lhd$ era un orden lineal.

Para cardinales mayores, puede mostrarse que las sumersiones que los definen pueden darse como un límite directo de sumersiones con medidas. La manera inicial en que Mitchell codificó estos límites fue simplificada por Jensen y Dodd, desarrollando el concepto de *extender*. Siendo los extenders una generalización natural del concepto de medida, el orden o puede definirse también entre ellos, de modo que $o(\kappa) = (2^\kappa)^+$ no es ya más una barrera. Por ejemplo, un cardinal es *fuerte* sii $o(\kappa) = \mathrm{ORD}$. En consistencia, un cardinal fuertemente compacto es bastante mayor que un cardinal fuerte.

Definición 6.2 *Para evitar definir extenders, tomemos como oficial la defini-*

ción usual: κ es fuerte sii para todo λ hay una $j : V \to M$ con $\mathrm{cp}(j) = \kappa$ *y* $V_\lambda \subseteq M$.

Mitchell [Mi1,3] construyó un modelo $L[\mathcal{F}]$, donde $\mathcal{F}$ es una sucesión de medidas. Los core models que se consideran actualmente, como los definidos por Mitchell y Steel ([Mi4], [MiSt], [St1,2]), son de esta forma, donde $\mathcal{F}$ es una sucesión de extenders. Esta sucesión satisface condiciones muy exigentes de compatibilidad y coherencia (presentes de manera simplificada en los modelos de Mitchell), que garantizan que los modelos son 'tan canónicos como es posible'. $\mathbf{K}$ tiene esta forma, y de acuerdo con qué cardinales grandes se desee considerar se modifican las restricciones que la sucesión de extenders debe satisfacer, así que los modelos de Silver, Kunen, Dodd, Jensen, Koepke, Mitchell y Steel son todos variaciones de la misma idea.

La 'motivación' en la teoría de core models es que si κ es un cardinal grande, digamos de tipo P, una sucesión $\mathcal{F}$ lo refleja, y en $L[\mathcal{F}]$ κ aún es un cardinal de tipo P. $L[\mathcal{F}]$ es 'bien comportado' y posee una 'aceptable' estructura fina. Del estudio de ésta se pueden deducir propiedades sobre V que dependen de la presencia o no de cardinales de tipo P, y esto permite establecer las cotas inferiores para los diferentes casos de, por ejemplo, $\neg\mathsf{SCH}$. Como en el ejemplo mencionado previamente de la saturación del ideal NS sobre $\aleph_1$, puede ser que una hipótesis en sí no requiera cardinales grandes en el universo, pero con ella puede ser posible construir un $L[\mathcal{F}]$, atestiguando que en consistencia tales cardinales deben existir. Otra de sus principales aplicaciones tiene que ver con teoría descriptiva de conjuntos (ver [MarSt]).

Hasta ahora, la teoría se conoce con cierto detalle hasta cardinales de Woodin ([MiSt], [St1,2]), y en las etapas *bajas* aun más:

Como ya se indicó, en el modelo original de Mitchell, $\lhd$ es un buen orden en la familia de medidas normales sobre κ, pero ahí vale GCH, así que $o(\kappa) \leq \kappa^{++}$. Moti Gitik, en un trabajo de fines de la década pasada y comienzos de ésta, y usando resultados de la teoría de pcf de Shelah, y teoremas previos de Prikry, Woodin y Magidor, mostró ([Gi1,2]):

Teorema 6.3 $\neg\mathsf{SCH} \sim_* \exists\kappa\,(o(\kappa) = \kappa^{++}) \sim_* \exists\kappa\,(\kappa$ *es medible y* $2^\kappa > \kappa^+) \sim_*$ $\aleph_\omega$ *es el primer contraejemplo a* GCH.

Se ignora qué tanto más pueden extenderse las construcciones, de modo que lleguen a conseguirse core models que acojan al menos un supercompacto. Se sabe con certeza, gracias a trabajos de Shelah, Foreman, Magidor, Woodin y Cummings, que a este nivel se han de emplear nuevas técnicas, y varios de los resultados obtenidos hasta ahora no pueden en modo alguno seguir siendo válidos.

Los últimos resultados en la teoría se deben a Mitchell, Steel, Martin, Gitik y Koepke. A nivel de cardinales de Woodin, que es el límite de lo que la teoría de modelos internos ha obtenido hasta ahora, no se sabe aún cómo construir $\mathbf{K}$ en

ZFC. La hipótesis adicional que se emplea es más o menos que ORD sea medible (algo menos es suficiente). Se han obtenido cotas inferiores muy precisas para fallas de SCH o resultados afines. Por ejemplo ([GiMi], [Gi3], [GiMa2]),

Teorema 6.4 *$2^{\aleph_\omega} > \aleph_{\omega_1}$ y $2^{\aleph_0} < \aleph_\omega \succ_* \exists\kappa$ fuerte.*

De hecho, la primera hipótesis implica que hay una sumersión no trivial de un modelo interno donde hay un cardinal fuerte en sí mismo.

Teorema 6.5 *$\exists\kappa, \alpha\,(\mathrm{cf}\,(\alpha) > \kappa, 2^\kappa = \kappa^{+\alpha}$ y κ es medible) es equiconsistente con $\exists\kappa, \alpha\,(\mathrm{cf}\,(\alpha) > \kappa, o(\kappa) = \kappa^{+\alpha})$. Más precisamente, si κ, α son como arriba, puede hallarse un modelo interno donde $o(\kappa) = \kappa^{+\alpha}$. Y, si se tiene la situación de abajo, por forcing, sin colapsar cardinales, puede conseguirse $2^\kappa = \kappa^{+\alpha}$, y κ aún medible.*

7 Forcing. Resultados Adicionales

Mencionemos, finalmente, en qué consisten los resultados conseguidos con forcing desde los trabajos de Magidor mencionados al final de la sección 4.

Shelah [Sh3] mostró que, asumiendo la consistencia de un supercompacto, es consistente para cualquier $\alpha < \omega_1$ que

$$\aleph_\omega^{\aleph_0} = \aleph_{\omega+\alpha+1}, \quad \text{con} \quad 2^{\aleph_0} < \aleph_\omega,$$

y Magidor adaptó luego esta prueba para que, además, GCH valiera bajo $\aleph_\omega$. Aún no se sabe si $\aleph_\omega^{\aleph_0} > \aleph_{\omega_1}$, $\aleph_\omega$ límite fuerte, es consistente.

Shelah también mostró resultados similares para cardinales de cofinalidad $> \omega$. Sus cotas en consistencia, sin embargo, parecen excesivamente grandes en comparación con las inferiores (y al menos para el resultado en $\aleph_\omega^{\aleph_0}$ lo son; ver [GiMa1]). Gran parte de los resultados han consistido en rebajar las cotas superiores. Por ejemplo, como ya se indicó, $2^\kappa > \kappa^+$, κ medible, lo que asegura un modelo de $\neg$SCH, es de hecho equiconsistente con esta afirmación.

Hugh Woodin, sin duda uno de los mejores conjuntistas de los últimos años, ha sido el responsable de la mayor parte de los avances en esta dirección, especialmente con sus trabajos de 1983 y 1984. Gracias a sus técnicas, pudo establecerse que los cardinales hipermedibles, introducidos en [Mi2], bastan en la mayoría de los resultados, lo que es importante pues estos son bastante menores que los supercompactos, y las técnicas de modelos internos les son accesibles. Woodin ha publicado pocos de sus trabajos, lo que dificulta encontrarlos; se espera (?) que pronto publique un libro escrito en coautoría con James Cummings ([CuWo]), donde han de aparecer, entre otras, sus aplicaciones y generalizaciones de una técnica conocida como forcing de Radin [R], que han permitido establecer varios resultados globales, como los que mencionaremos en un momento.

Entre 1990 y 1992, Gitik y Magidor desarrollaron nuevas técnicas de forcing, donde utilizaban extenders para producir lo que denominaron *buenos sistemas* de ultrafiltros. Con dichos sistemas, definían una noción de forcing mediante la cual es posible simultaneamente hacer 2^κ grande y κ singular, comenzando con un medible κ apropiado. Hasta entonces, esto había requerido de 2 pasos, independientes entre sí. Su técnica ha permitido rebajar en varias ocasiones las cotas, como en la consistencia de

$$\forall n < \omega\, (2^{\aleph_n} = \aleph_{n+1}) \wedge 2^{\aleph_\omega} = \aleph_{\omega+\alpha+1},$$

para $\alpha \in \omega_1$, a partir de cardinales 'suficientemente' fuertes, y establecer otras, incluso la equiconsistencia mencionada arriba (una dirección se debe a Woodin).

En 1979, siendo aún estudiantes, Woodin y Matthew Foreman [FWo] establecieron que (si hay un supercompacto con ω inaccesibles mayores que él, entonces) es consistente que $\forall\kappa\, (2^\kappa > \kappa^+)$, así que SCH puede fallar de una forma extremadamente dramática. Woodin, desde entonces, ha rebajado la hipótesis a la existencia de un $\mathcal{P}_2(\kappa)$-hipermedible (es decir, un κ tal que hay una sumersión $j : V \to M$ con punto crítico κ, ${}^\kappa M \subseteq M$ y $V_{\kappa+2} \subseteq M$), y ha conseguido establecer, más aun, la consistencia de

$$\forall\kappa\, (2^\kappa = \kappa^{++}).$$

(O, partiendo de $\mathcal{P}_n(\kappa)$-hipermedibles, la consistencia de $\forall\kappa\, (2^\kappa = \kappa^{+n})$. Como mencionamos antes del teorema 3.5, esto es imposible para $n \geq \omega$). Cummings y Shelah [CuSh] han generalizado el argumento de [FWo] para establecer algunos resultados de consistencia adicionales.

La tesis doctoral de Cummings, escrita en 1988 bajo la supervisión de Adrian Mathias y Woodin, traía otro resultado de este tipo: Comenzando con GCH y un $\mathcal{P}_3(\kappa)$-hipermedible, puede conseguirse un modelo ([Cu1]) donde GCH falle en κ sii κ es límite.

Estos resultados son análogos en cuanto a la naturaleza del modelo construido: En ambos casos es de la forma $V_\kappa^* = (V_\kappa)^{V^*}$, donde V^* es una extensión genérica de V y κ es el cardinal hipermedible. En V_κ^* hay muchos cardinales grandes pero, por el teorema de Solovay (ver el teorema 4.5 y los comentarios que lo anteceden), no puede haber cardinales fuertemente compactos.

Las técnicas de Magidor y Gitik son bastante flexibles y diversas variaciones y generalizaciones se han desarrollado recientemente. Ideadas en un comienzo para producir resultados en singulares de cofinalidad ω, Mira Segal en su tesis de magister en la Universidad Hebrea de Jerusalem mostró resultados similares para cofinalidad no contable, y Merimovich [GiMe] mostró que, partiendo de $\mathcal{P}^m(\kappa)$-hipermedibles ($m < \omega$), para cualquier $a : \omega \to \omega$ monótona y que satisfaga $a(n) > n$ es consistente tener $2^{\aleph_n} = \aleph_{a(n)}$ y $2^{\aleph_\omega} = \aleph_{\omega+m}$. Aún no se sabe si es posible tener 'libertad absoluta' debajo de cardinales mayores que $\aleph_\omega$, junto con fallas a SCH en dichos cardinales.

Y esto resume aproximadamente lo que se conoce con respecto al problema de los cardinales singulares hasta la fecha. No es claro qué tipos de comportamientos globales son válidos ni en qué cardinales singulares hay cotas para la exponencial (p. ej., comenzando con GCH y un cardinal fuerte κ, en [GiMa1] se construye un modelo donde κ es ahora singular de cofinalidad ω y $2^\kappa \geq \lambda$, para cualquier λ preestablecido).

Hay varias preguntas semejantes que es necesario resolver para tener una respuesta completa al problema. Y nos detenemos aquí, para que el lector interesado revise la bibliografía en busca de detalles.

References

[B] Stewart Baldwin. The $\triangleleft$-Ordering on Normal Ultrafilters, The Journal of Symbolic Logic 50 (1985), p. 936–952

[BaP] James E. Baumgartner—Karel Prikry. Singular Cardinals and the Generalized Continuum Hypothesis, The American Mathematical Monthly 84 (1977), p. 108–113

[BuMa] Maxim R. Burke—Menachem Magidor. Shelah's pcf Theory and its Applications, Annals of Pure And Applied Logic 50 (1990), p. 207–254

[Co] Paul J. Cohen. The Independence of the Continuum Hypothesis, Proceedings of the National Academy of Science of the United States of America 50 (1963), p. 1143–1148; 51 (1964), p. 105–110

[Cu1] James Cummings. A Model in which GCH Holds at Successors but Fails at Limits, Transactions of the American Mathematical Society 329 (1992), p. 1–39

[Cu2] James Cummings. Possible Behaviours for the Mitchell Ordering, Annals of Pure and Applied Logic 65 (1993), p. 107–123

[Cu3] James Cummings. Possible Behaviours for the Mitchell Ordering II, The Journal of Symbolic Logic 59 (1994), p. 1196–1209

[CuSh] James Cummings—Saharon Shelah. A Model in which Every Boolean Algebra has many Subalgebras, The Journal of Symbolic Logic 60 (1995), p. 992–1004

[CuWo] James Cummings—Hugh Woodin. *Generalised Prikry Forcings*, en preparación.

[DJe] Keith J. Devlin—Ronald B. Jensen. Marginalia to a Theorem of Silver, en *Proceedings of ISILC Kiel 1974*, Lecture Notes in Mathematics 499 Springer-Verlag (1975), p. 115–142

[Do] Anthony J. Dodd. *The Core Model*, London Mathematical Society Lecture Note Series 61, Cambridge University Press (1982)

[DoJe1] Anthony J. Dodd—Ronald B. Jensen. The Core Model, Annals of Pure and Applied Logic 20 (1981), p. 43–75

[DoJe2] Anthony J. Dodd—Ronald B. Jensen. The Covering Lemma for **K**, Annals of Mathematical Logic 22 (1982), p. 1–30

[DoJe3] Anthony J. Dodd—Ronald B. Jensen. The Covering Lemma for $L[U]$, Annals of Mathematical Logic 22 (1982), p. 127–135

[E] William B. Easton. Powers of Regular Cardinals, Annals of Mathematical Logic 1 (1970), p. 139–178

[FMaSh] Matthew Foreman—Menachem Magidor—Saharon Shelah. Martin's Maximum, Saturated Ideals, and Nonregular Ultrafilters I, Annals of Mathematics 127 (1988), p. 1–47

[FWo] Matthew Foreman—W. Hugh Woodin. The Generalized Continuum Hypothesis Can Fail Everywhere, Annals of Mathematics 133 (1991), p. 1–35

[GH] Fred Galvin—András Hajnal. Inequalities for Cardinal Powers, Annals of Mathematics 101 (1971), p. 491–498

[Gi1] Moti Gitik. The Negation of the Singular Cardinal Hypothesis from $o(\kappa) = \kappa^{++}$, Annals of Pure and Applied Logic 43 (1989), p. 209–234

[Gi2] Moti Gitik. The Strenght of the Failure of the Singular Cardinal Hypothesis, Annals of Pure and Applied Logic 51 (1991), p. 215–240

[Gi3] Moti Gitik. On Measurable Cardinals Violating the Continuum Hypothesis, Annals of Pure and Applied Logic 63 (1993), p. 227–240

[GiMa1] Moti Gitik—Menachem Magidor. The Singular Cardinal Hypothesis Revisited, en *Set Theory of the Continuum* Haim Judah—Winfried Just—W. Hugh Woodin (eds.), Mathematical Sciences Research Institute Publication 26, Springer-Verlag (1992), p. 243–279

[GiMa2] Moti Gitik—Menachem Magidor. Extenders Based Forcings, The Journal of Symbolic Logic 59 (1994), p. 445–460

[GiMe] Moti Gitik—Carmi Merimovich. Posible values for $2^{\aleph_n}$ and $2^{\aleph_\omega}$, Annals of Pure and Applied Logic 90 (1997) p. 193–241

[GiMi] Moti Gitik—William J. Mitchell. Indiscernible Sequences for Extenders, and the Singular Cardinal Hypothesis, Annals of Pure and Applied Logic, por aparecer

[Gö1] Kurt Gödel. The Consistency of the Axiom of Choice and of the Generalized Continuum Hypothesis, Proceedings of the National Academy of Sciences 24 (1938), p. 556, 557

[Gö2] Kurt Gödel. *Obras Completas*, Alianza Universidad 286 Alianza Editorial, 2da. edición (1989)

[Ha] Felix Hausdorff. Grundzüge einer Theorie der Geordneten Mengen, Mathematische Annalen 65 (1908), p. 435–505

[J] Thomas J. Jech. *Set Theory*, Pure and Applied Mathematics, Academic Press (1978)

[JSh] Thomas J. Jech—Saharon Shelah. Possible pcf Algebras, The Journal of Symbolic Logic 117 (1996), p. 313–317

[Je1] Ronald B. Jensen. The Fine Structure of the Constructible Hierarchy, Annals of Mathematical Logic 4 (1972), p. 229–308

[Je2] Ronald B. Jensen. Inner Models and Large Cardinals, The Bulletin of Symbolic Logic 1 (1995), p. 393–407

[K] Akihiro Kanamori. *The Higher Infinite*, Perspectives in Mathematical Logic, Springer-Verlag (1994)

[Ko] Peter G. Koepke. An Introduction to Extenders and Core Models for Extender Sequences, en *Logic Colloquium '78*, North-Holland (1989), p. 137–182

[Ku1] Kenneth Kunen. On the GCH at Measurable Cardinals, en *Logic Colloquium '69* Robin O. Gandy—Charles E. M. Yates (eds.), North-Holland (1971), p. 107–110

[Ku2] Kenneth Kunen. Combinatorics, en *Handbook of Mathematical Logic* Jon Barwise (ed.), Studies in Logic and the Foundations of Mathematics 90, North-Holland (1978), p. 371–401

[Ku3] Kenneth Kunen. *Set Theory. An Introduction to Independence Proofs*, Studies in Logic and the Foundations of Mathematics 102, North-Holland (1980)

[Ma1] Menachem Magidor. On the Singular Cardinals Problem I, Israel Journal of Mathematics 28 (1977), p. 1–31

[Ma2] Menachem Magidor. On the Singular Cardinals Problem II, Annals of Mathematics 106 (1977), p. 517–547

[MarSt] Donald A. Martin—John R. Steel. A Proof of Projective Determinacy, Journal of the American Mathematical Society 2 (1989), p. 71–125

[Mi1] William J. Mitchell. Sets Constructible from Sequences of Ultrafilters, The Journal of Symbolic Logic 39 (1974), p. 57–66

[Mi2] William J. Mitchell. Hypermeasurable Cardinals, en *Logic Colloquium '78* M. Boffa—D. van Dalen—K. McAloon (eds.), North-Holland (1979), p. 303–316

[Mi3] William J. Mitchell. Sets Constructed from Sequences of Measures: Revisited, The Journal of Symbolic Logic 48 (1983), p. 600–609

[Mi4] William J. Mitchell. The Core Model for Sequences of Measures I, Mathematics Proceedings of the Cambridge Philosophical Society 95 (1984), p. 229–260

[MiSt] William J. Mitchell—John R. Steel. *Fine Structure and Iteration Trees*, ASL Lecture Notes in Logic 3, Springer-Verlag, (1994)

[P] Karel Prikry. Changing Measurable into Accessible Cardinals, Dissertationes Mathematicae 68 (1970), p. 5–52

[R] Lon Berk Radin. Adding Closed Cofinal Sequences to Large Cardinals, Annals of Mathematical Logic 22 (1982), p. 243–261

[S] Dana S. Scott. Measurable Cardinals and Constructible Sets, Bulletin de l'Académie Polonaise des Sciences, Série des Sciences Mathématiques, Astronomiques et Physiques 9 (1961), p. 521–524

[Sh1] Saharon Shelah. A Note on Cardinal Exponentiation, The Journal of Symbolic Logic 45 (1980), p. 56–66

[Sh2] Saharon Shelah. *Proper Forcing*, Lecture Notes in Mathematics 940, Springer-Verlag (1982)

[Sh3] Saharon Shelah. The Singular Cardinals Problem: Independence Results, en *Surveys in Set Theory* Adrian R. D. Mathias (ed.), Cambridge University Press (1983), p. 116–134

[Sh4] Saharon Shelah. Cardinal Arithmetic for Skeptics, Bulletin (New Series) of the American Mathematical Society 26 (1992), p. 197–210

[Sh5] Saharon Shelah. *Cardinal Arithmetic*, Oxford Logic Guides 29, Oxford University Press (1994)

[ShWo] Saharon Shelah—W. Hugh Woodin. Large Cardinals Imply that Every Reasonably Definable Set of Reals is Lebesgue Measurable, Israel Journal of Mathematics (1990)

[Sil1] Jack H. Silver. Notes on Reverse Easton Forcing, inédito

[Sil2] Jack H. Silver. On the Singular Cardinals Problem, en *Proceedings of the International Congress of Mathematicians*, (1974), p. 265–268

[So] Robert M. Solovay. Strongly Compact Cardinals and the GCH, en *Proceedings of the Tarski Symposium* Leon Henkin et al. (eds.), Proceedings of Symposia in Pure Mathematics 25, American Mathemathical Society (1974), p. 365–372

[St1] John R. Steel. Inner Models with Many Woodin Cardinals, Annals of Pure and Applied Logic 65 (1993), p. 185–209

[St2] John R. Steel. *The Core Model Iterability Problem*, ASL Lecture Notes in Logic 8, Springer-Verlag (1996)

[W] Jiří Witzany. Any Behaviour of the Mitchell Ordering of Normal Measures is Possible, Proceedings of the American Mathematical Society 124 (1996), p. 291–297

[Wo] W. Hugh Woodin. Large Cardinal Axioms and Independence: The Continuum Problem Revisited, The Mathematical Intelligencer 16 (1994), p. 31–35